Задание № 3 Обратная матрица

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Понятие обратной матрицы. Метод миноров**

**А6.1.1 Определение.** Пусть дана квадратная матрица . Матрица  называется матрицей, *обратной* к матрице , если выполняются равенства (единичная матрица).

А6.1.3 Алгоритм вычисления обратной матрицы методом миноров:

1. Находим определитель  исходной матрицы . Если , то матрица  не имеет обратной.
2. Если , то транспонируя исходную матрицу, получим матрицу ;
3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы  и строим *присоединенную матрицу* ;
4. Находим обратную матрицу по формуле ;
5. Проверяем правильность вычислений, используя равенство ;

А6.1.4 *Замечание:* после деления элементов присоединенной матрицы  на числовое значение определителя  элементы обратной матрицы во многих случаях становятся дробными числами. Для упрощения вычислений при использовании обратной матрицы лучше представлять ее с вынесенным общим множителем . Если элементами матрицы  были целые числа, то матричные операции при таком представлении также будут производиться с целыми числами.

А6.1.5 Пример Вычисляя алгебраические дополнения элементов матриц, найти матрицы, обратные к данным и произвести проверку

а) ; ;

*Решение:* а) Вычислим определитель матрицы: . Вычеркивая первую строку и первый столбец, получим . Аналогично, вычеркивая первую строку и второй столбец, получим . Аналогично . Значит,

.

Проверка: ;

б) Вычислим определитель матрицы: .

Вычисляем алгебраические дополнения элементов:

,, ,

,, ,

,,.

**.**

Проверка: ;

**А6.1.6** *Замечание 1.* При нахождении обратной матрицы к матрице третьего порядка пришлось вычислить один определитель третьего порядка и девять определителей второго порядка. Если бы метод миноров применялся к матрице десятого порядка, пришлось бы вычислять один определитель десятого порядка и сто (!) определителей девятого порядка. С увеличением порядка матрицы количество вычислений лавинообразно возрастает, поэтому метод миноров не является оптимальным методом нахождения обратной матрицы: его имеет смысл применять для матриц порядка не выше третьего.

**6.2 Элементарные преобразования строк матрицы**

**А6.2.1 Определение**. *Элементарными преобразованиями строк* матрицы называются:

1) умножение всех элементов любой строки на одно и то же число, отличное от нуля;

2) прибавление ко всем элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

3) перестановка строк.

**А.6.2.2 Теорема (элементарные преобразования строк и умножение матриц)**

1. Умножение всех элементов некоторой строки матрицы  на одно и то же число равносильно умножению этой матрицы слева на некоторую диагональную матрицу;
2. Прибавление ко всем элементам некоторой строки матрицы  соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число равносильно умножению этой матрицы слева на некоторую трансвекцию.

**А6.2.3** *Замечание.* Перестановка строк может быть достигнута последовательным применением первых двух элементарных преобразований.

**А6.2.4** Рассмотрим квадратную матрицу  и будем проводить элементарные преобразования строк с целью превратить эту матрицу в единичную. Те же самые преобразования будем проводить и с единичной матрицей. В результате вместо матрицы  получим произведение матриц , где - различные диагональные матрицы и(или) трансвекции. Но тогда, по определению обратной матрицы, получим . Поскольку единичная матрица умножалась на те же матрицы , то получим . Значит, описанный выше способ действительно приводит к получению обратной матрицы.

**А6.2.5** **Пример.** Методом элементарных преобразований найти матрицы, обратные к данным

а) ; б) .

*Решение*: а) Рассмотрим матрицу .

Вычтем из второй строки матрицы первую строку, умноженную на 3: .

Умножим вторую строку на : .

Прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на :

. Слева от черты получили единичную матрицу, значит справа – матрицу, обратную к матрице .

.

б) Рассмотрим матрицу .

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на , а к третьей строке – первую, умноженную на :

.

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на :

.

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на 6, а к первой строке – третью, умноженную на :

. Поделим вторую строку на :

.

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на :

.

**Матричный способ решения систем линейных уравнений**

**А6.3.1** Систему уравнений  можно представить в матричной форме:

.

Если обозначить  – матрица коэффициентов,   –  матрица-столбец неизвестных,    – матрица-столбец правой части, то матричное уравнение запишется в краткой форме: . Умножим обе части этого равенства слева на матрицу : . Тогда  и . То есть, для решения системы достаточно найти обратную матрицу и умножить ее на матрицу-столбец правой части.

**Пример.** Решить систему с помощью обратной матрицы: .

*Решение*: запишем систему в матричном виде:

. Найдем матрицу, обратную к матрице :

. Вычислим матричное произведение

,

значит, .

**А6.3.2** *Замечание.* Матричный способ решения систем является не менее громоздким, чем правило Крамера. Этот способ применяют обычно в тех случаях, когда требуется решить несколько систем линейных уравнений с одной и той же матрицей и различными правыми частями.

**Самостоятельная работа:**

**2.3.1.** Для данных матриц найти обратные матрицы методом миноров

а) ; б) ; в) ;

**2.3.2.** Для данных матриц найти обратные матрицы методом миноров

а); б) ; в) ; г);

д) ; е) ; ж) ; з) ;

**2.3.4.** Для данных матриц найти обратные матрицы наиболее рациональным способом

а) ; б) ; в) ;

г); д) ; е) ;

**2.3.6.** Решить системы уравнений матричным способом

а) ; б) ;

**2.3.7.** Решить системы уравнений матричным способом

а) ; б) ;

**2.3.8.** Решить системы уравнений матричным способом

а) ; б) ;

**Ответы:**

**2.3.1.** а) ; б) ; в) ;

**2.3.2.** а); б) ; в) ; г); д) ; е) ; ж) ; з) ;

**2.3.4.** При отсутствии навыков быстрого устного счета наиболее рациональным способом является метод элементарных преобразований

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ; е) ;

**2.3.6.** а) ; б) ;

**2.3.7.** а) ; б) ; **2.3.8.** а) ; б) ;